U 2. razredu srednje škole učenici dokazuju sljedeću tvrdnju:

Tvrdnja. Neka je p(x) = a*x^2 + b*x + c, pri čemu su a, b, c realne konstante takve da je a~=0. Tada p poprima najveću vrijednost (4*a*c-b^2)/(4*a) za x = -b/(2*a). Ako je a > 0, ta je vrijednost globalni minimum, a ako je a < 0, riječ je o globalnom maksimumu.

U tom se razredu ta tvrdnja dokazuje tako da se p(x) zapiše kao:

p(x) = a*(x + b/(2*a))^2 +c - b^2/(4*a),

pa se odatle izvedu oba gornja zaključka. Naravno, ista se tvrdnja puno lakše dokaže koristeći derivacije, odnosno f'' - test. Odredimo prve dvije derivacije polinoma p:

p'(x) = 2*a*x + b,
p''(x) = 2*a,

Izjednačavanjem pravila polinoma p' s nulom slijedi da je x = -b/(2*a) stacionarna točka. Budući da je, zbog pretpostavke a~=0, očito p''(x) ~= 0, koristeći f'' - test zaključujemo da za x = -b/(2*a) p(x) poprima lokalni, ali i globalni ekstrem (uz klasifikaciju ekstrema zavisno o vrijednosti konstante a kao u tvrdnji).

Nadalje, ako je x = -b/(2*a), onda je

p(x) = p(-b/(2*a)) = a*(-b/(2*a))^2 + b*(-b/(2*a)) + c = (uz malo računa) = (4*a*c-b^2)/(4*a).

Iskazanu i dokazanu tvrdnju primijenimo na naš zadatak. Dakle, tražimo početnu brzinu v0. U zadatku nas ne zanima za koju vrijednost nezavisne varijable t se postiže globalni maksimum (tj. najveća visina), nego za koju se brzinu v0 postiže ta vrijednost. Možemo zaključiti da se ta vrijednost postiže za t = -v0/(2*(-8)) = v0/16, ali taj podatak nam je, nažalost, beskoristan s obzirom na podatke zadane u zadatku. Zbog toga je bolje uočiti da su u ovom slučaju:

a = -8, b = v0 i c = 0,

pa upravo te vrijednosti uvrstiti u izraz (4*a*c-b^2)/(4*a) kojim se računa vrijednost globalnoga maksimuma:

(4*(-8)*0-v0^2)/(4*(-8)) = -v0^2/(-32) = v0^2/32.

Prema zahtjevu zadatka, ta vrijednost treba biti jednaka 3.125, pa iz jednadžbe v0^2/32 = 3.125 i zahtjeva v0 > 0 slijedi v0 = 10 (m/s).

Nisam rješavao zadatak koristeći derivacije jer sam siguran da je gornji način ujedno i najkraći način rješavanja zadatka (kad se uzme u obzir potrebno predznanje učenika). Imam dojam da su upravo na taj način ciljali i autori zadatka postavljajući ga u oglednom ispitu.

Bojan Kovačić