TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES ZAGREB	**Matematika na državnoj maturi**	**rješenja oglednoga ispita iz listopada 2021. (viša razina)**

1. A. Računamo:

$$\frac{\sqrt[3]{123}}{1+\sqrt{45}} \approx \frac{4.9731898333}{1+6.7082039325} \approx 0.64518 \approx 0.645.$$

2. D. Znamo da vrijedi jednakost $1\text{ m} = 100\text{ cm} = 10^2\text{ cm}.$ Odatle izravno slijedi:

$$1\text{ m}^3 = \left(10^2\right)^3\text{ cm}^3 = 10^{2\cdot 3}\text{ cm}^3 = 10^6\text{ cm}^3.$$

3. C. Podijelimo:

$$\frac{1.674\cdot 10^{-27}}{9.109\cdot 10^{-31}} = \frac{1.674}{9.109}\cdot 10^{-27-(-31)} \approx 0.18377429\cdot 10^{-27+31} = 0.18377429\cdot 10^4 = 1837.7429 \approx 1838.$$

Dakle, masa protona je približno 1838 puta veća od mase elektrona.

4. A. Koristeći osnovna pravila za množenje i dijeljenje potencija s istim bazama, te potenciranje potencije imamo redom:

$$\begin{aligned}
&(-x\cdot y)^3\cdot\left(-x\cdot y^5\right)^{-2} : x^{-1} = ((-1)\cdot x\cdot y)^3\cdot\left((-1)\cdot x\cdot y^5\right)^{-2} : x^{-1} = \\
&= (-1)^3\cdot x^3\cdot y^3\cdot(-1)^{-2}\cdot x^{-2}\cdot y^{5\cdot(-2)} : x^{-1} = \\
&= (-1)^{3+(-2)}\cdot x^{3+(-2)-(-1)}\cdot y^{3+5\cdot(-2)} = \\
&= (-1)^{3-2}\cdot x^{3-2+1}\cdot y^{3-10} = (-1)^1\cdot x^2\cdot y^{-7} = -x^2\cdot y^{-7}.
\end{aligned}$$

5. A. Primijetimo da brojevi lepeza nakon x godina tvore aritmetički niz (označimo ga s f) kojemu je prvi član $18+3$, a razlika 3. Pritom je $x \in \mathbb{N}$. Opći član toga niza je:

$$f(x) = (18+3)+(n-1)\cdot 3 = 21+3\cdot n-3 = 3\cdot n+18.$$

6. B. Neka su p i n redom broj bodova koje donosi točno riješeni zadatak, odnosno broj (negativnih) bodova koje donosi netočno riješeni zadatak. Očito su $p>0$ i $n<0$.

Marko je točno riješio 26 zadataka. Budući da je rješavao sve ispitne zadatke, zaključujemo da je netočno riješio $30-26=4$ zadatka. Za točno riješenih 26 zadataka dobio je ukupno $p\cdot 26$ bodova, dok je za netočno riješena 4 zadatka dobio ukupno $n\cdot 4$ bodova. Markov ukupan broj bodova iznosi $26\cdot p+4\cdot n$ i on mora biti jednak 118. Dakle, vrijedi jednakost:

$$26\cdot p+4\cdot n = 118.$$

Petar je točno riješio 18 zadataka. Budući da je rješavao sve ispitne zadatke, zaključujemo da je netočno riješio $30-18=12$ zadataka. Za točno riješenih 18 zadataka dobio je ukupno $p\cdot 18$ bodova, dok je za netočno riješenih 12 zadataka dobio ukupno $n\cdot 12$ bodova. Petrov ukupan broj bodova iznosi $18\cdot p+12\cdot n$ i on mora biti jednak 54. Dakle, vrijedi jednakost:

$$18\cdot p+12\cdot n=54.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} 26\cdot p+4\cdot n=118, \\ 18\cdot p+12\cdot n=54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13\cdot p+2\cdot n=59, \\ 3\cdot p+2\cdot n=9. \end{cases}$$

Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobivamo $10\cdot p=50,$ a odatle dijeljenjem s 10 slijedi $p=5.$ Uvrštavanjem te vrijednosti npr. u drugu jednadžbu sustava dobivamo $3\cdot 5+2\cdot n=9$, odnosno $15+2\cdot n=9$, odnosno $2\cdot n=-6.$ Odatle je $n=-3.$ Dakle, svaki netočno riješeni zadatak boduje se s 3 negativna boda.

7. **D**. Iz jednadžbe pravca očitamo da je njegov koeficijent smjera $k=\frac{1}{2}$, a odsječak na osi ordinata $l=\frac{-7}{2}$. To znači da pravac prolazi točkom $S=\left(0,\frac{-7}{2}\right)$ na strogo negativnom dijelu osi ordinata i da predstavlja graf strogo rastućega polinoma 1. stupnja (tj. ima oblik /). Jedini od četiriju prikazanih pravaca koji ima oba navedena svojstva (siječe os ordinata u točki iz njezina strogo negativnoga dijela i ima oblik /) je pravac nacrtan na slici **D**.

8. **A**. Sva četiri trokuta su očito pravokutna. Središte kružnice opisane *bilo kojem* pravokutnom trokutu nalazi se u polovištu hipotenuze (najdulje stranice toga trokuta). Od svih četiriju ponuđenih slika, jedino se na slici **A**. točka S nalazi na hipotenuzi, pa bi ona mogla biti središte tom trokutu opisane kružnice.

9. **C.** Promatrani pravci se očito ne sijeku jer bi tada pripadni bridovi kocke imali točno jedan zajednički vrh.

Oni nisu ni podudarni jer vrhovi A, C, D i E očito određuju tetraedar.

Oni nisu ni usporedni jer su pravci AB i CD usporedni (kao pravci koji sadrže dvije nasuprotne stranice kvadrata), pa bi pravci AB i AE u slučaju usporednosti imali točno jednu zajedničku točku, što je nemoguće.

Dakle, promatrani pravci su mimosmjerni.

10. A. Za sve dopustive x, y vrijedi:

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{(x-y)\cdot(x+y)}{x-y}=x+y,$$
$$\frac{x^2+x\cdot y}{x+y}=\frac{x\cdot(x+y)}{x+y}=x,$$
$$\frac{x\cdot y-y^2}{x-y}=\frac{y\cdot(x-y)}{x-y}=y.$$

Zaključujemo da je jedino algebarski razlomak naveden pod **A**. skraćen do kraja. (Prema gornjim jednakostima, ostala tri algebarska razlomka nisu skraćena do kraja, tj. mogu se još skratiti.)

11. B. Riješimo kvadratnu jednadžbu $5\cdot k^2+20\cdot k-105=0$. Dobivamo:

$$k_{1,2}=\frac{-20\pm\sqrt{(-20)^2-4\cdot5\cdot(-105)}}{2\cdot5}=\frac{-20\pm\sqrt{400-(-2100)}}{10}=\frac{-20\pm\sqrt{400+2100}}{10}=$$
$$=\frac{-20\pm\sqrt{2500}}{10}=\frac{-20\pm50}{10}\Rightarrow$$
$$k_1=\frac{-20+50}{10}=\frac{30}{10}=3,\ k_2=\frac{-20-50}{10}=\frac{-70}{10}=-7.$$

Primjenom osnovnoga algebre dobivamo:

$$5\cdot k^2+20\cdot k-105=5\cdot(k-3)\cdot(k-(-7))=5\cdot(k-3)\cdot(k+7).$$

Među ponuđenim binomima, jedino je binom $k-3$ faktor zadanoga izraza.

12. D. Neka je n iznos džeparca kojega je Pia dobila u siječnju. Tada je iznos džeparca kojega je Pia dobila u veljači $3\cdot n$. Označimo li s x iznos džeparca kojega je Pia dobila u ožujku, onda mora vrijediti jednakost:

$$x+\frac{50}{100}\cdot x=3\cdot n.$$

Riješimo ovu jednadžbu po nepoznanici x. Imamo redom:

$$x\cdot\left(1+\frac{50}{100}\right)=3\cdot n,$$
$$1.5\cdot x=3\cdot n,\quad /:1.5$$
$$x=\frac{3\cdot n}{1.5}=\frac{3}{1.5}\cdot n=2\cdot n.$$

Dakle, Pia je u siječnju dobila n kn, a u ožujku $2 \cdot n$ kn, pa zaključujemo da je iznos njezina džeparca u ožujku dva puta veći nego u siječnju.

13. C. Zapišimo izraze b i c koristeći logaritam po bazi 2. Primjenom osnovnih pravila za logaritmiranje dobivamo:

$$b = \log_2(4 \cdot x) = \log_2 4 + \log_2 x = \log_2\left(2^2\right) + \log_2 x = 2 + \log_2 x,$$
$$c = 2 \cdot \log_2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot (\log_2 x - \log_2 2) = 2 \cdot (\log_2 x - 1) = 2 \cdot \log_2 x - 2.$$

Uvrštavanjem ovih izraza u jednakost $3 \cdot c - b = 12$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
&3 \cdot \left(2 \cdot \log_2 x - 2\right) - (2 + \log_2 x) = 12,\\
&6 \cdot \log_2 x - 6 - 2 - \log_2 x = 12,\\
&5 \cdot \log_2 x = 12 + 6 + 2,\\
&5 \cdot \log_2 x = 20, \quad / : 5\\
&\log_2 x = 4,\\
&x = 2^4 = 16.
\end{aligned}$$

14. B. Primijetimo da je nužno $v_0 > 0$. Najveća vrijednost funkcije h iznosi

$$h_{\max} = \frac{4 \cdot (-8) \cdot 0 - v_0^2}{4 \cdot (-8)} = \frac{-v_0^2}{-32} = \frac{v_0^2}{32}.$$

Ona mora biti jednaka 3.125, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$\frac{v_0^2}{32} = 3.125.$$

Množenjem te jednadžbe s 32 dobivamo $v_0^2 = 100$. Jedino strogo pozitivno rješenje te jednadžbe je $v_0 = \sqrt{100} = 10$. Dakle, početna brzina iznosi 10 m/s.

15. B. Iz zadanih podataka dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$140 = 250 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}}.$$

Riješimo je na uobičajen način:

$$\begin{aligned}
&140 = 250 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}}, \quad / : 250\\
&2^{\frac{-t}{5730}} = \frac{14}{25} \qquad / \log_2
\end{aligned}$$

$$\frac{-t}{5730} = \log_2\left(\frac{14}{25}\right), \qquad / \cdot (-5730)$$

$$t = -5730 \cdot \log_2\left(\frac{14}{25}\right) = -5730 \cdot \frac{\log\left(\frac{14}{25}\right)}{\log 2} = -5730 \cdot \frac{\log 14 - \log 25}{\log 2} =$$

$$= 5730 \cdot \frac{\log 25 - \log 14}{\log 2} \approx 4793.1522640191 \approx 4793 \text{ godine.}$$

16. B. Iz zadanih podataka slijedi da funkcija najprije strogo pada sve do $x = -1$, potom strogo raste sve do $x = 1$, pa potom opet strogo pada sve do $x = 4$ i zatim strogo raste. Odatle zaključujemo da ona ima točno dva intervala strogoga rasta: $\langle -1, 1 \rangle$ i $\langle 4, +\infty \rangle$.

17. D. Iz slike se vidi da je $-\overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{LJ}$ jer se u oba slučaja radi o dijagonali pravokutnika čije stranice imaju duljine 3 i 1. Tako je:

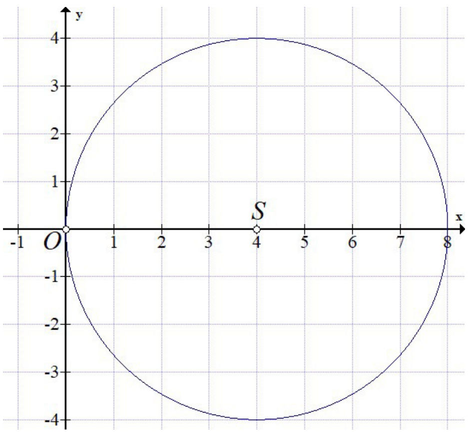
$$\vec{x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{JC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$$

jer se radi o stranici kvadrata duljine 1.

18. C. Uočimo da zadana kružnica ima središte na osi apscisa i dodiruje os ordinata. Zbog ta dva svojstva kružnica nužno mora prolaziti ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Duljina polumjera kružnice jednaka je udaljenosti središta kružnice od ishodišta pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini, pa lako zaključujemo da je $r = 4$, odnosno $r^2 = 16$. Dakle, tražena jednadžba glasi:

$$(x-4)^2 + y^2 = 16.$$

Vidjeti sliku 1.



Slika 1.

19. D. Označimo s α mjeru kuta *nasuprot* osnovici zadanoga trokuta. Tada vrijedi jednakost:

$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180^\circ.$$

Iz te jednakosti izrazimo traženu mjeru kuta β:

$$2 \cdot \beta = 180^\circ - \alpha, \quad /:2$$
$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

S druge strane, iz pravokutnoga trokuta čije su katete duge 5.42 i 6.15, a mjera kuta nasuprot kateti dugoj 5.42 jednaka α, odmah slijedi:

$$\text{tg } \alpha = \frac{5.42}{6.15} = \frac{542}{615} \Rightarrow \alpha = \text{arctg}\left(\frac{542}{615}\right) \approx 41.38975368^\circ,$$

pa je konačno

$$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \approx 90^\circ - \frac{41.38975368^\circ}{2} = 69.30512316^\circ \approx 69^\circ 18' 18'' \approx 69^\circ 18'.$$

20. B. Označimo mjeru traženoga kuta s α. Primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{15^2 + 8^2 - 12^2}{2 \cdot 15 \cdot 8} = \frac{225 + 64 - 144}{240} = \frac{145}{240} = \frac{29}{48} \Rightarrow$$
$$\alpha = \arccos\left(\frac{29}{48}\right) \approx 52.831100344 \approx 52^\circ 49' 52'' \approx 52^\circ 50'.$$

21. B. Neka je *a* duljina osnovnoga brida promatrane prizme (iskazana u cm). Veći dijagonalni presjek te prizme je pravokutnik kojemu su duljine stranica $2 \cdot a$ (duljina najveće dijagonale šesterokuta) i a (duljina visine prizme koja je, prema zahtjevu zadatka, jednaka duljini osnovnoga brida prizme). Površina toga pravokutnika jednaka je $P = (2 \cdot a) \cdot a = 2 \cdot a^2$. Ta vrijednost treba biti jednaka 32, pa iz jednadžbe

$$2 \cdot a^2 = 32$$

slijedi $a = \sqrt{16} = 4$. (Smijemo uzeti drugi korijen jer je duljina osnovnoga brida uvijek strogo pozitivan realan broj.) Tako slijedi da je traženi volumen jednak:

$$V = B \cdot v = 6 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot a = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^3 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4^3 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 64 = 96 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

22.B. Neka je r polumjer jednoga privjeska. Zbroj volumena svih triju privjesaka treba biti jednak volumenu ogrlice. S druge je strane volumen ogrlice jednak količniku mase ogrlice i gustoće zlata. Izjednačavanjem dobivamo:

$$3\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi\right)=\frac{m}{\rho}\Leftrightarrow 4\cdot r^3\cdot\pi=\frac{m}{\rho}\Leftrightarrow r^3=\frac{m}{4\cdot\pi\cdot\rho}\Leftrightarrow$$
$$r=\sqrt[3]{\frac{m}{4\cdot\pi\cdot\rho}}=\sqrt[3]{\frac{24.57}{4\cdot\pi\cdot15.58}}\approx 0.50066\approx 0.5\text{ cm}=5\text{ mm}.$$

23.B. Podijelimo *svaki* član brojnika i nazivnika s najvećom potencijom varijable n u brojniku i nazivniku. Lako vidimo da je ta potencija n^2, što znači da svaki član brojnika i nazivnika dijelimo s n^2. Koristeći osnovna svojstva graničnih vrijednosti i jednakost $\lim\limits_{n}\left(\frac{a}{n^2}\right)=0,$ za svaki $a\in\mathbb{R}$, imamo redom:

$$L=\lim_n\left(\frac{\frac{4-n^2}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}}\right)=\lim_n\left(\frac{\frac{4}{n^2}-\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}\right)=\lim_n\left(\frac{\frac{4}{n^2}-1}{1+\frac{1}{n^2}}\right)=\frac{0-1}{1+0}=\frac{-1}{1}=-1.$$

24.D. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su karte u obama špilovima označene prirodnim brojevima od 1 do 20. Također, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je kartu najprije izvukao Ivan. Vjerojatnosni prostor koji modelira promatrani slučajni pokus je:

$$\Omega=\{(i,j):i,j\in\{1,2,3,\ldots,18,19,20\}\}.$$

Prva komponenta uređenoga para (i,j) označava kartu koju je izvukao Ivan, a druga kartu koju je izvukla Janja. Prema pravilu umnoška, ukupan broj svih elemenata skupa Ω jednak je:

$$\text{card}(\Omega)=20\cdot20=20^2.$$

Skup svih povoljnih ishoda A tvore uređeni parovi iz skupa Ω kojima je prva komponenta jednaka drugoj (jer to znači da su izvučene jednake karte). Dakle,

$$A=\{(i,i):i\in\{1,2,3,\ldots,18,19,20\}\}.$$

Očito je $\text{card}(A)=20$ jer je izborom prve komponente jednoznačno određena druga, a prvu možemo izabrati na točno 20 načina.

Tako zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p=\frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}=\frac{20}{20^2}=\frac{1}{20}=0.05.$$

Primijetimo da je dobivena vjerojatnost jednaka vjerojatnosti da ćemo iz špila od 20 različitih karata izvući točno jednu *unaprijed zadanu* kartu (npr. kartu označenu brojem 1). U tom je slučaju broj povoljnih ishoda jednak 1 (jer nam odgovara izvući jedino unaprijed zadanu kartu), dok je broj mogućih ishoda jednak 20 (jer možemo izvući bilo koju od 20 različitih karata), pa slijedi tvrdnja. Ona je zapravo posve prirodna jer promatrani slučajni pokus možemo shvatiti kao da je Janjina karta unaprijed zadana (i jednaka Ivanovoj izvučenoj karti).

25. 151. Budući da je $1\text{ km}=1000\text{ m}=100000\text{ cm},$ slijedi da 1 cm na karti odgovara zračnoj udaljenosti od $\frac{500000}{100000}=5\text{ km}$. Dakle, tražena udaljenost (iskazana u kilometrima) jednaka je $30.2\cdot 5=151\text{ km}.$

26. 10. Očitamo: $\operatorname{Re}(6-8\cdot i)=6,\ \operatorname{Im}(6-8\cdot i)=-8,$ pa odmah slijedi:

$$|6-8\cdot i|=\sqrt{6^2+(-8)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10.$$

27. $m>\frac{13}{2}=6.5.$ Riješimo najprije zadanu jednadžbu po nepoznanici x. Imamo redom:

$$\begin{aligned}&8\cdot x-2\cdot m-3=0,\\&8\cdot x=2\cdot m+3,\quad /:8\\&x=\frac{2\cdot m+3}{8}.\end{aligned}$$

Dobivena vrijednost treba biti strogo veća od 2, pa slijedi:

$$\begin{aligned}&\frac{2\cdot m+3}{8}>2,\quad /\cdot 8\\&2\cdot m+3>16,\\&2\cdot m>16-3,\\&2\cdot m>13.\end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 2 slijedi $m>\frac{13}{2}$ ili, ekvivalentno, $m>6.5$.

28. $\frac{-8}{5}=-1.6.$ Zapišimo jednadžbu prvoga pravca u eksplicitnom obliku:

$$2\cdot x-5\cdot p\cdot y+11=0,$$

$$(-5\cdot p)\cdot y=(-2)\cdot x-11,\quad /:(-5)\cdot p$$
$$y=\frac{2}{5\cdot p}\cdot x+\frac{11}{5\cdot p}.$$

Taj će pravac biti usporedan s pravcem $y=-0.25\cdot x-4$ ako i samo ako koeficijenti smjerova obaju pravaca budu jednaki. Koeficijent smjera prvoga pravca je $\frac{2}{5\cdot p}$, a koeficijent smjera drugoga pravca -0.25. Izjednačavanjem dobivamo jednadžbu:

$$\frac{2}{5\cdot p}=-0.25.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$2=5\cdot p\cdot(-0.25),$$
$$(-1.25)\cdot p=2,$$
$$p=\frac{2}{-1.25}=\frac{-200}{125}=\frac{-8}{5}=-1.6.$$

29.1.) $2\cdot x-3\cdot y-5=0$. Dokažimo najprije sljedeću tvrdnju:

Tvrdnja 1. Neka su $A,B,C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ konstante. Jednadžba pravca simetričnoga pravcu $A\cdot x+B\cdot y+C=0$ s obzirom na ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini glasi: $A\cdot x+B\cdot y-C=0$.

Dokaz: Zapišimo jednadžbu zadanoga pravca u segmentnom obliku:

$$A\cdot x+B\cdot y=-C,\quad /:(-C)$$
$$\frac{A\cdot x}{-C}+\frac{B\cdot y}{-C}=1,$$
$$\frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}}=1.$$

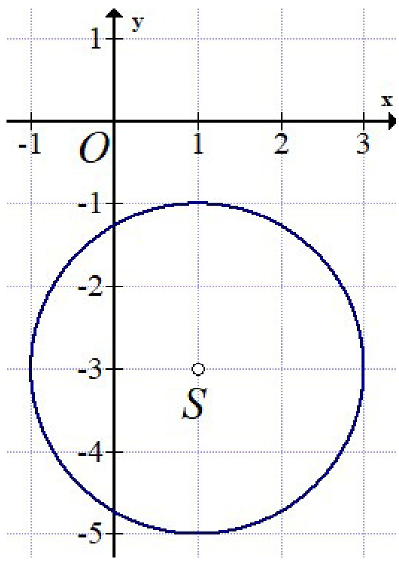
Odatle zaključujemo da taj pravac prolazi točkama $\left(\frac{-C}{A},0\right)$ i $\left(0,\frac{-C}{B}\right)$. Točke simetrične tim dvjema točkama s obzirom na ishodište su $\left(\frac{C}{A},0\right)$ i $\left(0,\frac{C}{B}\right)$ (jednostavno promijenimo predznak koordinate koja je različita od nule). Jednadžba pravca koji prolazi tim dvjema točkama je:

$$\frac{x}{\frac{C}{A}}+\frac{y}{\frac{C}{B}}=1,$$
$$\frac{A\cdot x}{C}+\frac{B\cdot y}{C}=1, \quad /\cdot C$$
$$A\cdot x+B\cdot y=C,$$
$$A\cdot x+B\cdot y-C=0,$$

što je i trebalo dokazati. ■

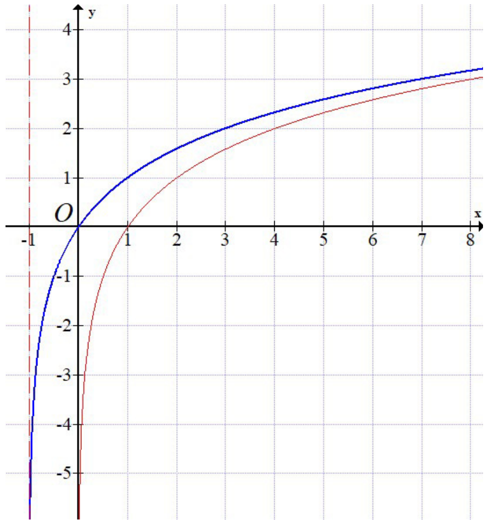
Primijenimo dokazanu tvrdnju na pravac iz zadatka. Koeficijente uz x i y prepišemo, a slobodnom članu promijenimo predznak. Tako dobivamo da traženi pravac ima jednadžbu $2\cdot x-3\cdot y-5=0$.

2.) Vidjeti sliku 2. Zadani skup točaka je kružnica čije je središte u točki $S=(-(-1),-(+3))=(1,-3)$, a polumjer jednak $r=\sqrt{4}=2$. Ucrtamo točku S u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa potom šestarom konstruiramo kružnicu sa središtem u S i polumjerom 2. Dobivamo sliku 2.



Slika 2.

30.1.) Vidjeti sliku 3. Nacrtajmo najprije graf funkcije $f_1(x)=\log_2 x$. Taj je graf krivulja koja prolazi npr. točkama $(1,0)$, $(2,1)$ i $(4,2)$, te za asimptotu ima os ordinata. Traženi graf dobit ćemo tako da krivulju $y=\log_2 x$ translatiramo za jednu jedinicu duljine ulijevo. Asimptota traženoga grafa bit će pravac $x=-1$. Dobivamo sliku 3. (Plavom punom crtom prikazan je traženi graf. Crvenom punom crtom prikazana je krivulja $y=\log_2 x$. Crvenom iscrtkanom crtom prikazan je pravac $x=-1$.)



Slika 3.

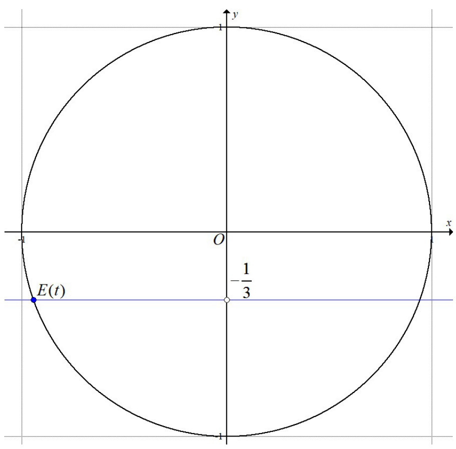
2.) $3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4.$ Iz zadane tablice zaključujemo da je $f(-2) = 0$ i $f(0) = -4.$ Uvrštavanjem tih vrijednosti u pravilo funkcije f dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} 3 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0, \\ 3 \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 4 - 2 \cdot b + c = 0, \\ 0 + 0 + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \cdot b + c = -12, \\ c = -4. \end{cases}$$

Iz posljednjega sustava odmah slijedi $(b, c) = (4, -4).$ Dakle, traženo je pravilo

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4.$$

31.1.) Vidjeti sliku 4. Znamo da svaka točka na središnjoj jediničnoj kružnici ima koordinate $(\cos t, \sin t)$, gdje je $t \in \mathbb{R}$. Zbog toga povučemo pravac $y = -\frac{1}{3}$ i odredimo sjecište toga pravca i zadane kružnice u trećem kvadrantu (jer sve točke u trećem kvadrantu imaju strogo negativnu prvu koordinatu). Dobivamo sliku 4.



Slika 4.

2.) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{6}\cdot\pi$. Riješimo zadanu jednadžbu na uobičajen način:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\begin{cases} x-\frac{\pi}{6}=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\cdot k\cdot\pi, \\ x-\frac{\pi}{6}=\pi-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\cdot k\cdot\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi, \\ x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi, \\ x=\pi-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi, \\ x=\frac{5}{6}\cdot\pi+2\cdot k\cdot\pi \end{cases}, \; k\in\mathbb{Z}.$$

Lako vidimo da ako je $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, onda je $x\notin\langle 0,\pi\rangle$. Zbog toga zadana jednadžba ima točno dva rješenja u intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ i to su $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{5}{6}\cdot\pi$.

32.1.) 4.5. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$b=\sqrt{5.3^2-2.8^2}=\sqrt{28.09-7.84}=\sqrt{20.25}=4.5 \text{ cm}.$$

2.) $150^\circ=\frac{5}{6}\cdot\pi \text{ rad}$. Iz zadanih podataka zaključujemo da je duljina visine romba v = 2.3 cm. Neka je α mjera *šiljastoga* kuta romba. Tada je duljina osnovice romba jednaka

$$a=\frac{v}{\sin\alpha}=\frac{2.3}{\sin\alpha},$$

pa je površina romba jednaka

$$P=a\cdot v=\frac{2.3}{\sin\alpha}\cdot 2.3=\frac{5.29}{\sin\alpha}.$$

Prema podacima u zadatku, površina romba iznosi 10.58 cm^2, pa izjednačavanjem dobivamo trigonometrijsku jednadžbu:

$$\frac{5.29}{\sin\alpha}=10.58.$$

Ta je jednadžba ekvivalentna jednadžbi $\sin\alpha=\frac{1}{2}$. Ona u intervalu $\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$ ima jedinstveno rješenje $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Odatle slijedi da je tražena mjera jednaka:

$$\beta=\pi-\alpha=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\cdot\pi\text{ rad.}=150^\circ.$$

33.1.) ≈ 217.86. Primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$\left|\overline{PR}\right|=\sqrt{\left|\overline{PS}\right|^2+\left|\overline{SR}\right|^2-2\cdot\left|\overline{PS}\right|\cdot\left|\overline{SR}\right|\cdot\cos\angle PSR}=\sqrt{75^2+166^2-2\cdot 75\cdot 166\cdot\cos 125^\circ}=$$
$$=\sqrt{5625+27556-24900\cdot\cos 125^\circ}\approx\sqrt{47463.053265141}\approx 217.8601690653\approx 217.86\text{ m.}$$

2.) 25. Duljina stranice osjenčanoga dijela trokuta koji leži na stranici $\overline{AC}$ jednaka je $\frac{1}{4}\cdot\left|\overline{AC}\right|=\frac{1}{4}\cdot 12=3.$

Analogno, duljina stranice osjenčanoga dijela trokuta koji leži na stranici $\overline{BC}$ jednaka je $\frac{1}{4}\cdot\left|\overline{BC}\right|=\frac{1}{4}\cdot 8=2.$

Manja stranica osjenčanoga dijela trokuta koja je usporedna sa stranicom $\overline{AB}$ je srednjica trokuta ABC (njezini krajevi dijele dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ na dva jednaka dijela), pa je njezina duljina jednaka polovici duljine stranice $\overline{AB}$, tj.

$$\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|=\frac{1}{2}\cdot 16=8.$$

Naposljetku, duljina preostale stranice osjenčanoga dijela trokuta jednaka je $\frac{3}{4}$ duljine stranice $\overline{AB}$ jer njezini krajevi dijele dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ u omjeru 1 : 3 računajući od vrha A, odnosno vrha B. (Preciznije, označimo li s E i F krajeve te preostale stranice, onda su trokutovi EFC i ABC slični s koeficijentom sličnosti $\frac{3}{4}$, pa se duljine stranica $\overline{EF}$ i $\overline{AB}$ odnose kao $3:4$.) Prema tome, duljina te stranice jednaka je $\frac{3}{4}\cdot\left|\overline{AB}\right|=\frac{3}{4}\cdot 16=12.$

Tako zaključujemo da je traženi opseg jednak

$$O = 3 + 2 + 8 + 12 = 25 \text{ cm}.$$

34.1.) $7^{\frac{9}{4}}$**.** Imamo redom:

$$\sqrt{7^5 \cdot \sqrt{\frac{1}{7}}} = \sqrt{\sqrt{\left(7^5\right)^2 \frac{1}{7}}} = \sqrt[2\cdot 2]{7^{5\cdot 2-1}} = \sqrt[4]{7^{10-1}} = \sqrt[4]{7^9} = 7^{\frac{9}{4}}.$$

2.) $\approx 6.3 \cdot 10^{-6}$**.** Iz zadanih podataka dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$-\log\left(\mathrm{H}^+\right) = 5.2.$$

Riješimo je na uobičajen način:

$$\log\left(\mathrm{H}^+\right) = -5.2,$$
$$\mathrm{H}^+ = 10^{-5.2} \approx 6.3095734448 \cdot 10^{-6} \approx 6.3 \cdot 10^{-6}.$$

35.1.) 4. Lako vidimo da je $[-12, -3\rangle \cap [-7, 3\rangle = [-7, -3\rangle$. Posljednjem poluzatvorenom intervalu pripadaju negativni cijeli brojevi –7, –6, –5 i –4. Njih ima ukupno 4.

2.) 25. Neka je $a = 123456780$. Tada su $123456785 = a + 5$ i $123456775 = a - 5$, pa je zadani izraz jednak:

$$a \cdot a - (a+5) \cdot (a-5) = a^2 - \left(a^2 - 5^2\right) = a^2 - a^2 + 5^2 = 5^2 = 25.$$

36.1.) $\mathbb{R} \setminus [0, 7] = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 7, +\infty\rangle$. Primijetimo da je koeficijent uz x^2 jednak 1. To znači da pripadna kvadratna funkcija poprima strogo pozitivne vrijednosti svuda osim na segmentu omeđenom njezinim nultočkama (ako postoje). Zbog toga ćemo najprije riješiti pripadnu kvadratnu jednadžbu, a potom napisati rješenje zadatka.

Pripadna kvadratna jednadžba je $x^2 - 7 \cdot x = 0$. Zapišemo li je u obliku $x \cdot (x-7) = 0$, odmah možemo očitati njezina rješenja: $x_1 = 0$, $x_2 = 7$. Prema prethodnoj je napomeni traženi skup svih rješenja zadane nejednadžbe

$$S = \mathbb{R} \setminus [0, 7] = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 7, +\infty\rangle.$$

2.) Ni za jedan. Pripadna diskriminanta mora biti strogo negativna. Budući da je

$$D = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = \underbrace{b^2}_{\geq 0} + 20 \geq 0 + 20 = 20 > 0,$$

zaključujemo da zadana jednadžba ima realna rješenja za svaki $b \in \mathbb{R}$. Dakle, ni za jedan $b \in \mathbb{R}$ zadana jednadžba nema realnih rješenja.

37.1.) $72 \cdot \pi$. Neka su r i h redom duljina polumjera osnovke, odnosno duljina visine zadanoga stošca (obje iskazane u cm). Opseg osnovke stošca jednak je $2 \cdot r \cdot \pi$ cm, pa iz jednadžbe $2 \cdot r \cdot \pi = 12 \cdot \pi$ dijeljenjem s $2 \cdot \pi$ odmah slijedi $r = 6$. Zbog toga je i $h = 6$, pa je traženi volumen stošca jednak:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot \pi \cdot 6 = 2 \cdot 6^2 \cdot \pi = 2 \cdot 36 \cdot \pi = 72 \cdot \pi \text{ cm}^3.$$

2.) 34 527.84. Izrazimo najprije površinu naslijeđenoga zemljišta u m^2. Primijenimo jednostavno pravilo trojno:

$$\begin{array}{ll} \uparrow \; 0.8 \text{ lanca} & 5754.64 \text{ m}^2 \; \uparrow \\ \quad 2 \text{ lanca} & P_1 \text{ m}^2 \end{array}$$

Postavimo razmjer:

$$P_1 : 5754.64 = 2 : 0.8.$$

Riješimo taj razmjer na uobičajen način:

$$0.8 \cdot P_1 = 5754.64 \cdot 2, \quad / : 0.8$$
$$P_1 = \frac{5754.64 \cdot 2}{0.8} = 14386.6.$$

Izrazimo sada površinu kupljenoga zemljišta u m^2. Ne moramo primijeniti jednostavno pravilo trojno, nego odmah dobivamo:

$$P_2 = 3.5 \cdot 5754.64 = 20141.24.$$

Zbog toga je tražena je površina jednaka:

$$P = P_1 + P_2 = 14386.6 + 20141.24 = 34527.84 \text{ m}^2.$$

38.1.) $n-1$. Primijenimo identitet:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Tako redom dobivamo:

$$\frac{n^2 \cdot n! - n!}{(n+1)!} = \frac{n! \cdot \left(n^2 - 1\right)}{(n+1) \cdot n!} = \frac{n^2 - 1}{n+1} = \frac{(n-1) \cdot (n+1)}{n+1} = n - 1.$$

2.). Iz zadanoga grafikona najprije zaključimo da je 26% svih maturanata dobilo ocjenu odličan(5). Odatle slijedi da je $60\% - 26\% = 34\%$ svih maturanata dobilo ocjenu vrlo dobar(4), kao i da je $100\% - (11\% + 24\% + 60\%) = 5\%$ svih maturanata dobilo ocjenu nedovoljan(1). Traženu prosječnu ocjenu dobit ćemo kao zbroj umnožaka *relativnih* frekvencija i pripadajuće ocjene:

$$\overline{s} = 5\% \cdot 1 + 11\% \cdot 2 + 24\% \cdot 3 + 34\% \cdot 4 + 26\% \cdot 5 = 0.05 + 0.22 + 0.72 + 1.36 + 1.3 = 3.65.$$

39.1.) 40100. Najprije ćemo dokazati da je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aritmetički. U tu je svrhu dovoljno provjeriti jednakost

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2.$$

Iz definicije zbroja prvih *n* članova niza zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$S_n = S_{n-1} + a_n .$$

Zbog toga je:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(2 \cdot n^2 + 3 \cdot n\right) - \left(2 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1)\right) = 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 2 \cdot (n-1)^2 - 3 \cdot (n-1) =$$
$$= 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 2 \cdot (n^2 - 2 \cdot n + 1) - 3 \cdot n + 3 = 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 2 \cdot n^2 + 4 \cdot n - 2 - 3 \cdot n + 3 = 4 \cdot n + 1.$$

Tako su

$$a_{n-1} = 4 \cdot (n-1) + 1 = 4 \cdot n - 4 + 1 = 4 \cdot n - 3,$$
$$a_{n+1} = 4 \cdot (n+1) + 1 = 4 \cdot n + 4 + 1 = 4 \cdot n + 5,$$

pa slijedi:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{4 \cdot n - 3 + 4 \cdot n + 5}{2} = \frac{8 \cdot n + 2}{2} = 4 \cdot n + 1 = a_n,$$

što znači da je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aritmetički. Njegov prvi član jednak je $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5,$ dok je razlika niza jednaka $d = a_2 - a_1 = 4 \cdot 2 + 1 - 5 = 8 + 1 - 5 = 4.$ (Taj zaključak smo mogli izvesti uočivši da se pravilo za opći član niza može zapisati u obliku $a_n = 4 \cdot (n-1) + 5 = 5 + (n-1) \cdot 4.$))

Članovi polaznoga aritmetičkoga niza na neparnim mjestima također tvore aritmetički niz. U tu je svrhu dovoljno provjeriti jednakost

$$a_{2\cdot n+1}=\frac{a_{2\cdot n-1}+a_{2\cdot n+3}}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Doista,

$$\frac{a_{2\cdot n-1}+a_{2\cdot n+3}}{2}=\frac{4\cdot(2\cdot n-1)+1+4\cdot(2\cdot n+3)+1}{2}=\frac{8\cdot n-4+1+8\cdot n+12+1}{2}=\frac{16\cdot n+10}{2}=8\cdot n+5=$$
$$=4\cdot(2\cdot n+1)+1=a_{2\cdot n+1},$$

što je i trebalo pokazati. Prvi član toga novoga niza je također $a_1=5$. Razlika novoga niza jednaka je $d_1=a_3-a_1=4\cdot 3+1-5=12+1-5=8$. Tako slijedi da je traženi zbroj jednak:

$$S_{100}=\frac{100}{2}\cdot(2\cdot 5+(100-1)\cdot 8)=50\cdot(10+99\cdot 8)=50\cdot(10+792)=50\cdot 802=40100.$$

2.) ≈ 292.89. Radi određenosti, označimo vrhove trapeza s $ABCD$ tako da je $\left|\overline{AB}\right|=105,\ \left|\overline{CD}\right|=87.5$. Iz vrhova C i D povucimo visine na osnovicu $\overline{AB}$. Neka su E i F redom nožišta tih visina. Označimo:

$$x:=\left|\overline{AE}\right|,$$
$$y:=\left|\overline{BF}\right|.$$

Iz pravokutnih trokutova AED i BFC slijedi:

$$\left|\overline{DE}\right|=x\cdot\operatorname{tg}25^\circ,$$
$$\left|\overline{CF}\right|=y\cdot\operatorname{tg}\left(180^\circ-145^\circ\right)=y\cdot\operatorname{tg}35^\circ.$$

Međutim, očito je $\left|\overline{DE}\right|=\left|\overline{CF}\right|$ (duljina visine trapeza), pa izjednačavanjem dobivenih jednakosti slijedi

$$x\cdot\operatorname{tg}25^\circ=y\cdot\operatorname{tg}35^\circ.$$

Nadalje, uočimo da vrijedi:

$$87.5=\left|\overline{CD}\right|=\left|\overline{EF}\right|=\left|\overline{EB}\right|+\left|\overline{BF}\right|=\left(\left|\overline{AB}\right|-\left|\overline{AE}\right|\right)+\left|\overline{BF}\right|=105-x+y,$$

otkuda je

$$x - y = 105 - 87.5 \Leftrightarrow x - y = 17.5.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} x - y = 17.5, \\ x \cdot \text{tg } 25^\circ = y \cdot \text{tg } 35^\circ. \end{cases}$$

Riješimo taj sustav. Iz druge jednadžbe je

$$y = \frac{x \cdot \text{tg } 25^\circ}{\text{tg } 35^\circ},$$

pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu slijedi:

$$\begin{aligned}
&x - \frac{x \cdot \text{tg } 25^\circ}{\text{tg } 35^\circ} = 17.5, \\
&x \cdot \left(1 - \frac{\text{tg } 25^\circ}{\text{tg } 35^\circ}\right) = 17.5, \\
&x = \frac{17.5}{1 - \frac{\text{tg } 25^\circ}{\text{tg } 35^\circ}} = \frac{17.5}{\frac{\text{tg } 35^\circ - \text{tg } 25^\circ}{\text{tg } 35^\circ}} = \frac{\text{tg } 35^\circ}{\text{tg } 35^\circ - \text{tg } 25^\circ} \cdot 17.5.
\end{aligned}$$

Tako je

$$y = \frac{x \cdot \text{tg } 25^\circ}{\text{tg } 35^\circ} = \frac{\text{tg } 35^\circ}{\text{tg } 35^\circ - \text{tg } 25^\circ} \cdot 17.5 = \frac{\text{tg } 25^\circ}{\text{tg } 35^\circ - \text{tg } 25^\circ} \cdot 17.5.$$

Iz tih dviju jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned}
\left|\overline{AD}\right| &= \frac{x}{\cos 25^\circ} = \frac{\frac{\text{tg } 35^\circ}{\text{tg } 35^\circ - \text{tg } 25^\circ}}{\cos 25^\circ} \cdot 17.5 = \frac{\text{tg } 35^\circ}{\left(\text{tg } 35^\circ - \text{tg } 25^\circ\right) \cdot \cos 25^\circ} \cdot 17.5 = \\
&= \frac{\text{tg } 35^\circ}{\text{tg} 35^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 25^\circ} \cdot 17.5, \\
\left|\overline{BC}\right| &= \frac{y}{\cos\left(180^\circ - 145^\circ\right)} = \frac{\frac{\text{tg } 25^\circ}{\text{tg } 35^\circ - \text{tg } 25^\circ}}{\cos 35^\circ} \cdot 17.5 = \frac{\text{tg } 25^\circ}{\left(\text{tg } 35^\circ - \text{tg } 25^\circ\right) \cdot \cos 35^\circ} \cdot 17.5 = \\
&= \frac{\text{tg } 25^\circ}{\sin 35^\circ - \text{tg} 25^\circ \cos 35^\circ} \cdot 17.5.
\end{aligned}$$

Tražena duljina žice jednaka je opsegu promatranoga trapeza, pa imamo:

$$O=\left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{BC}\right|+\left|\overline{CD}\right|+\left|\overline{AD}\right|=105+\frac{\operatorname{tg}25^\circ}{\sin35^\circ-\operatorname{tg}25^\circ\cdot\cos35^\circ}\cdot17.5+87.5+$$
$$+\frac{\operatorname{tg}35^\circ}{\operatorname{tg}35^\circ\cdot\cos25^\circ-\sin25^\circ}\cdot17.5=$$
$$=192.5+\left(\frac{\operatorname{tg}35^\circ}{\sin35^\circ-\operatorname{tg}25^\circ\cdot\cos35^\circ}+\frac{\operatorname{tg}35^\circ}{\operatorname{tg}35^\circ\cdot\cos25^\circ-\sin25^\circ}\right)\cdot17.5\approx$$
$$\approx292.8949908996\approx292.89\text{ m.}$$

40. $\left(\frac{3}{2},10\right)$**.** Očito je $N=(4,5)$. Graf zadane funkcije prolazi točkom *N*, što znači da je $f(4)=5.$ Nadalje, kao zbroj količnika dvaju polinoma i konstante, funkcija *f* je neprekidno derivabilna funkcija na svojoj prirodnoj domeni, pa smijemo primijeniti Fermatov teorem. On kaže da je vrijednost prve derivacije funkcije *f* u točki lokalnoga ekstrema (pa posebno i u točki *N*) jednaka nuli. Dakle, vrijede jednakosti:

$$f(4)=5,$$
$$f'(4)=0.$$

Primjenom osnovnih pravila za deriviranje i tablice derivacija elementarnih funkcija odredimo:

$$f'(x)=\frac{(B-4\cdot x)'\cdot\left(x^2-4\cdot x+5\right)-(B-4\cdot x)\cdot\left(x^2-4\cdot x+5\right)'}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}+(C)'=$$
$$=\frac{(0-4\cdot1)\cdot\left(x^2-4\cdot x+5\right)-(B-4\cdot x)\cdot\left(2\cdot x^{2-1}-4\cdot1+0\right)}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}+0=$$
$$=\frac{(-4)\cdot\left(x^2-4\cdot x+5\right)-(B-4\cdot x)\cdot\left(2\cdot x-4\right)}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}=$$
$$=\frac{-4\cdot x^2+16\cdot x-20-2\cdot B\cdot x+8\cdot x^2+4\cdot B-16\cdot x}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}=$$
$$=\frac{4\cdot x^2-2\cdot B\cdot x+4\cdot B-20}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}.$$

Uvrštavanjem $x=4,\ f(4)=5$ u pravilo zadane funkcije dobivamo:

$$\begin{aligned}
5 &= \frac{B-4\cdot 4}{4^2-4\cdot 4+5}+C, \\
5 &= \frac{B-16}{16-16+5}+C, \\
5 &= \frac{B-16}{5}+C, \\
C &= 5-\frac{B-16}{5}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x=4,\ f^{'}(4)=0$ u pravilo derivacije zadane funkcije dobivamo:

$$\begin{aligned}
&0=\frac{4\cdot 4^2-2\cdot B\cdot 4+4\cdot B-20}{\left(4^2-4\cdot 4+5\right)^2}, \\
&4\cdot 16-8\cdot B+4\cdot B-20=0, \\
&4\cdot B=44, \quad /:4 \\
&B=11.
\end{aligned}$$

Sada lako slijedi

$$C=5-\frac{B-16}{5}=5-\frac{11-16}{5}=5-\frac{-5}{5}=5-(-1)=5+1=6.$$

Tako smo dobili:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{11-4\cdot x}{x^2-4\cdot x+5}+6, \\
f^{'}(x)&=\frac{4\cdot x^2-2\cdot 11\cdot x+4\cdot 11-20}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}=\frac{4\cdot x^2-22\cdot x+24}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}=2\cdot\frac{2\cdot x^2-11\cdot x+12}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}.
\end{aligned}$$

Znamo da je $x=4$ jedno rješenje jednadžbe $f^{'}(x)=0.$ No, jednadžba $f^{'}(x)=0$ je ekvivalentna jednadžbi $2\cdot x^2-11\cdot x+12=0$, pa zaključujemo da je $x=4$ jedno rješenje jednadžbe $2\cdot x^2-11\cdot x+12=0$.

Prema Vièteovim formulama, umnožak obaju rješenja te jednadžbe jednak je $\frac{12}{2}=6,$ pa zaključujemo da je drugo rješenje te jednadžbe, a time i druga stacionarna točka zadane funkcije, $x_2=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$

Utvrdimo radi li se o lokalnom maksimumu. Primijetimo da je $x^2-4\cdot x+5>0$ za svaki $x\in\mathbb{R}$. (Vodeći koeficijent je strogo pozitivan, a diskriminanta pripadne kvadratne funkcije je strogo negativna.) To znači da je prirodna domena zadane funkcije skup ℝ. Predznak njezine derivacije jednak je predznaku njezina brojnika, tj. predznaku izraza $2 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 12$. Lako vidimo da su npr. $f'(0) = 12 > 0$ i $f'(2) = -2 < 0$ (**oprez**: lijevo od točke $\frac{3}{2}$ možemo uzeti bilo koju vrijednost jer lijevo od te točke ne postoji nijedna druga stacionarna točka, ali desno od te točke moramo uzeti vrijednost između $\frac{3}{2}$ i 4.) Dakle, funkcija f strogo raste na intervalu $\left\langle -\infty, \frac{3}{2} \right\rangle$, a strogo pada na intervalu $\left\langle \frac{3}{2}, 4 \right\rangle$, pa ona doista postiže svoj lokalni maksimum za $x = \frac{3}{2}$.

Izračunamo:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{11 - 4 \cdot \frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} + 5} + 6 = \frac{11 - 6}{\frac{9}{4} - 6 + 5} + 6 = \frac{5}{\frac{9}{4} - 1} + 6 = \frac{5}{\frac{5}{4}} + 6 = 4 + 6 = 10,$$

pa je tražena točka $M = \left(\frac{3}{2}, 10\right)$.

Pripremio:

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač