Parcijalne

2. dif. jednadžbe

II reda

Pod parcijalnom diferencijalnom jednadžbom k-tog reda koja povezuje nepoznatu funkciju $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ s nezavisnim varijablama $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ podrazumijevamo jednadžbu

$$F\left(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0 \qquad (1)$$

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$$

Specijalno kad se radi o diferencijalnim jednadžbama s parcijalnim derivacijama ~~do~~ prvog i drugog reda koriste se oznake

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad q = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

pa relacija (1) postaje

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \qquad (2)$$

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \qquad (3)$$

Jednadžba s parcijalnim derivacijama naziva se <u>kvazilinearnom</u> ako je ona linearna obzirom na sve najstarije derivacije nepoznate funkcije u

Jednadžba

$$A\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(\quad) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (4)$$

je kvazilinearna jednadžba drugog reda.

Ako je jednadžba s parcijalnim derivacijama linearna u odnosu na nepoznatu funkciju i sve njene derivacije ona se naziva linearnom

Jednadžba

(5) $$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + G(x,y)u + F(x,y) = 0$$

je linearna jednadžba s parcijalnim derivacijama drugog reda u odnosu na funkciju u.

Rješenjem jednadžbe (1) naziva se svaka funkcija u koja kad se zajedno sa svojim parcijalnim derivacijama uvrsti u (1) dovodi do identiteta.

Problemi tehnike i fizike uglavnom dovode do diferencijalnih jednadžbi s parcijalnim derivacijama drugog reda. Tako na pr.

1. širenje valova, zvukova, elektromagnetskih kolebanja itd. dovodi do jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (6)$$

gdje je c brzina širenja vala u nekoj danoj sredini.

2. proces širenja topline u nekom homogenom tijelu dan je jednadžbom

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (7)$$

3. Jednadžba Poissona

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x,y,z) \qquad (8)$$

odnosno Laplaceova

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad 9$$

Jednadžbe (6)-(9) obično smatramo osnovnim jednadžbama matematske fizike. Naime njihovim rješavanjem obuhvaćen je veoma velik dijapazon problema fizike i tehnike.

Svaka od tih jednadžbi ima nepregledno mnogo rješenja i zato kao prvi zadatak postavlje se problem naći ona rješenja koja imaju izvjestan fizikalni smisao. Ta rješenja dobivamo tako, da rješenju jednadžbe (1) nametnemo dodatne uslove. Ti dodatni uslovi su

<u>granični uslovi</u> tj. ~~uslovi~~ zahtjevi zadani na granici razmatrane sredine

<u>početni uslovi</u> koji ~~se~~ odnose na vrijeme t tj. na momenat od kog počimamo izučavati danu pojavu.

Pri tome treba imati na umu da <u>svaki matematski model</u> ~~ako~~ može odgovarati praksi i stvarnosti samo onda ako je:

1. tim modelom moguće naći rješenje
2. to rješenje mora biti jedinstveno
3. rješenje mora biti stabilno.

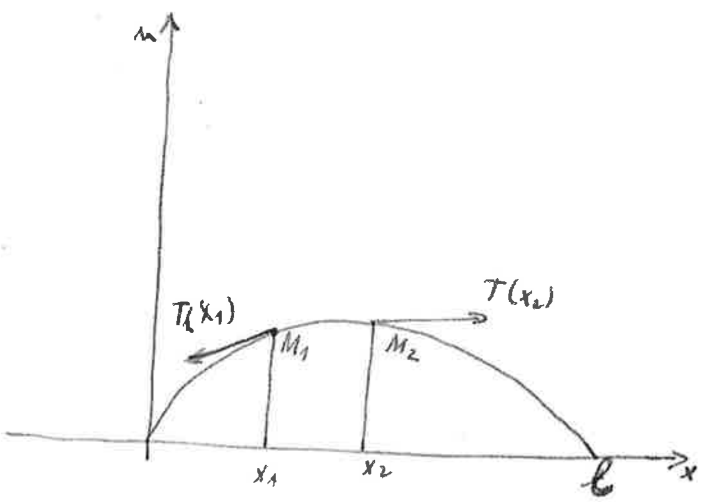
Problem koji odgovara tim trima postavljenim zahtjevima naziva se <u>korektnim problemom</u>

1. Jednodim. titranja žice

Pod žicom podrazumijevamo nategnutu gipku nit.

Ovako formiran model žice omogućava izvjesna uprošćavanja, ~~zanemarenja~~, naime zanemarivanje onih sila koje nastaju pri izvlačenju niti iz položaja ravnoteže (oscilacije), zatim sila teže itd.

Razmatrat ćemo žicu koja je izvučena iz položaja ravnoteže. Tada žica će proizvoditi izvjesna titranja kojima želimo dati matematičku formulaciju.



Model toliko uprošćujemo, da ostavljamo u razmatranje samo one sile koje se pokoravaju Hookovom zakonu:

Kod nategnute na krajevima pričvršćene žice natezanje je proporcionalno

Kad je žica u položaju ravnoteže uočimo njen segment $[x_1, x_2]$. Ovaj se pri procesu titranja deformira u segment $[M_1 M_2]$ kojeg je duljina u momentu t jednaka

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \doteq \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$$

Dakle prema našim pretpostavkama žica se ne izvlači i na osnovu Hookova zakona sila natezanja T u svakoj točki žice ne mijenja se s vremenom.

Veličina koja karakterizira proces titranja žice neka je to vektor položaja svake tačke žice. To je očito graf funkcije Γ_u, $u(x_1, t_0)$.

Radi jednostavnosti razmatrat ćemo tzv. <u>poprečna titranja</u> tj. takva titranja koja se proizvode u jednoj ravnini okomito na položaj ravnoteže.

Ako položaj ravnoteže izaberemo za os $0x$ tada će se proces titranja karakterizirati skalarom

$$u(x, t)$$

koji izražava otklon od položaja ravnoteže neke tačke žice s apscisom $\underline{x}$ u vremenskom momentu $\underline{t}$

Pri svakom fiksiranom t graf funkcije Γ_u daje oblik odnosno položaj titrajuće žice u tom momentu t.

Razmatrat ćemo samo „male" oscilacije žice tj. takve kod kojih je moguće <u>veličine $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ zanemariti.</u>

Radi toga kad je žica u položaju ravnoteže uočimo njen segment $[x_1, x_2]$ koji se pri procesu titranja deformira u segment $[M_1, M_2]$ kojeg je duljina u momentu t dana sa

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$$

Dakle mi pretpostavljamo, da se žica pri izlazanju iz položaja ravnoteže ne izvlači i da se na osnovu Hookova zakona sila T natezanja u svakoj tački žice ne mijenja s vremenom. Vektor T nam opisuje položaj žice i poznavanje njega ustvari i jest poznavanje modela titranja.

~~Načinimo projekcije vektora T na koordinatne osi.~~

~~U tu svrhu promatrat ćemo segment $[x_1, x_2]$ odnosno $[M_1, M_2]$~~

Uporedo sa silom natezanja T promatramo i sile natezanja

$\overline{T}(x_1)$ i $\overline{T}(x_2)$ koje djeluju na segment $[x_1, x_2]$ odnosno $[M_1, M_2]$ i to u smjeru tangenata na luk $\widehat{M_1 M_2}$ grafa Γ_u što je i razumljivo jer je žica na krajevima ~~pričvršćena~~ pričvršćena.

Neka je $\alpha(x)$ kut između pozitivnog smjera osi Ox i fiksiranog pozitivnog smjera vektora tangente u tački ~~s~~ afscisom x.

Tada su projekcije vektora $\overline{T}(x_1)$ i $\overline{T}(x_2)$ na koordinatne osi dane sa

$$\left.\begin{aligned} \Pi_x \overline{T}(x_2) &= T(x_2)\cos\alpha(x_2) \\ \Pi_x \overline{T}(x_1) &= -T(x_1)\cos\alpha(x_1) \end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned} \Pi_u \overline{T}(x_2) &= T(x_2)\sin\alpha(x_2) \\ \Pi_u \overline{T}(x_1) &= -T(x_1)\sin\alpha(x_1) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Koristeći pretpostavku da su istezanja (izolacija) iz položaja ravnoteže mala možemo pisati

$$\cancel{\sin\alpha} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \doteq 1 \qquad (3)$$

$$\sin\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \doteq \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (4)$$

Propozicija: Za silu natezanja T možemo smatrati da ne ovisi o mjestu x.

Neka je zadana linearna homogena parcijalna dif. jednadžba drugog reda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

gdje je c zadana konstanta, a $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$

Funkcija $u(x,t)$ zadovoljava slijedeće uvjete:

1) $$u(0,t) = 0 \qquad t \geq 0$$
$$u(l,t) = 0$$

ovi uvjeti znače da je žica upeta na početku i na kraju segmenta $[0, l]$

2) početni uvjet koji u momentu $t=0$ određuje položaj žice s jedne strane, a s druge brzinu svake tačke na žici.

Ako žica počinje titrati s početnom brzinom jednakom nuli početni uvjeti su

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \qquad 0 \leq x \leq l$$

Rješenja jednadžbi (1) treba pretpostaviti da je funkcija f na $[0, l]$ diferencijabilna do uključujući druge derivacije.

1. Rješavanje jednadžbe (1) separacijom varijabli (ili kako fizičari kažu traženjem vlastitih titraja)

Za jednadžbu (1) tražimo rješenje u obliku

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \qquad (2)$$

Iz (2) slijedi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)\,T''(t)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\,T(t) \qquad (3)$$

Stavljajući (3) u (1) slijedi

$$X(x)\,T''(t) = c^2\,X''(x)\,T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\,\frac{T''(t)}{T(t)} \qquad (4) \qquad c^2 XT \neq 0$$

Budući je u (4) lijeva strana funkcija samo od x to ona ne može zavisiti o t, odnosno desna strana je funkcija samo od t, pa ne zavisi o x.
Dakle mora biti svaka strana za sebe jednaka jednoj te istoj konstanti k, pa iz (4) slijedi

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k \qquad \frac{1}{c^2}\,\frac{T''(t)}{T(t)} = k$$

$$X''(x) - k\,X(x) = 0 \qquad T''(t) - c^2 k\,T(t) = 0 \qquad (5)$$

(5) su jednadžbe s konstantnim koeficijentima pa su njihova rješenja

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{k}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{k}\,x}$$
$$T(t) = d_1 e^{c\sqrt{k}\,t} + d_2 e^{-c\sqrt{k}\,t}$$

Koristeći granične uslove imamo

$$X(0)=0$$
$$X(l)=0$$

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$C_1 e^{\sqrt{k}l} + C_2 e^{-\sqrt{k}l} = 0$$

Ovo je sistem od dvije linearne algebarske jednačine za nepoznanica c_1 i c_2 i on ima rješenje različito od trivijalnog $c_1 = c_2 = 0$

samo onda ako je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{k}l} & e^{-\sqrt{k}l} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow e^{-\sqrt{k}l} - e^{\sqrt{k}l} = 0 / e^{\sqrt{k}l}$$

$$\underline{1 = e^{2\sqrt{k}l}}$$

Koristeći Eulerove formule proizlazi $e^{2\pi i} = e^{2n\pi i} = +1$

$$e^{2\sqrt{k}l} = e^{2n\pi i} \Rightarrow$$

$$2\sqrt{k}l = 2n\pi i \;/^2 \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm$$

$$k = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

Vrijednosti k se zovu <u>svojstvene vrijednosti</u> navedenog problema.

Prema tome opće rješenje prve jednačine je

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}}x} = C_1 e^{i\frac{n\pi}{l}x} + C_2 e^{-i\frac{n\pi}{l}x} =$$

$$= C_1\left[\cos\frac{n\pi}{l}x + i\sin\frac{n\pi}{l}x\right] + C_2\left[\cos\frac{n\pi}{l}x - i\sin\frac{n\pi}{l}x\right] =$$

$$(C_1 + C_2)\cos\frac{n\pi}{l}x + (C_1 i - C_2 i)\sin\frac{n\pi}{l}x =$$

$$= A\cos\frac{n\pi}{l}x + B\sin\frac{n\pi}{l}x$$

Radi $X(0)=0 \Rightarrow A = 0$. Prema tome kao rješenje koje zadovoljava uvjet na rubu je

$$X_n(x) = B\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

pri čemu smo uzeli samo pozitivni kojeni indeksi je B proizvoljna konstanta.

Funkcije X_n se zovu karakteristične funkcije problema vrijednosti na rubu diferencijalne jednadžbe za $X(x)$

Kada u drugu jednadžbu relacije (5) stavimo $k = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ dobiva se

$$T''(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{l^2} T(t) = 0 \qquad (6)$$

Njeno rješenje je

$$T(t) = D_1 e^{\frac{cn\pi}{l} i t} + D_2 e^{-\frac{cn\pi}{l} i t} =$$

$$= E \cos \frac{cn\pi}{l} t + F \sin \frac{cn\pi}{l} t$$

Početnim uslovom $T'(0) = 0$ dano je rješenje

$$T(t) = C \cos \frac{cn\pi}{l} t$$

gdje je C proizvoljna konstanta

Prema (2) jednadžbu (1) zadovoljavaju funkcije

$$\underline{\underline{u_n(x,t) = a_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{cn\pi}{l} t}} \qquad n = 1, 2, \dots$$

gdje je a_n proizvoljna konstanta

Titraji predočeni ovim izrazom zovu se vlastiti titraji žice.

Oni su harmonijski u vremenu t s periodom $P = \frac{2\pi}{\frac{cn\pi}{l}} = \frac{2l}{cn}$, a s amplitudom $a_n \sin \frac{n\pi}{l} x$

Čvorovi titranja su za one x za koje je

$$\sin\frac{n\pi}{l}x = 0$$

$$x = 0, \frac{l}{n}, \dots, \frac{(n-1)l}{n}$$

Svaki linearni spoj funkcija $u_n(x,t)$ s konstantnim koeficijentima također je rješenje jednadžbe (1), naime vrijedi

<u>Propozicija</u> Funkcija $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x \cos\frac{cn\pi}{l}t$ zadovoljava jednadžbu (1)

Da bi funkcija $u(x,t)$ iz gornje propozicije predočivala rješenje treba odrediti konstante a_n tako da gornji red jednoliko konvergira. To mora vrijediti i za redove koji se iz njega dobivaju kad se gornji red derivira po x i t kako to zahtjevaju početni i rubni uslovi.

Da bi zadovoljili početni uslov mora biti

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad 0 \le x \le l$$

<u>Zaključak</u> Iz početne jednakosti proizlazi: funkcija $u(x,t)$ predočena beskonačnim redom bit će rješenje graničnog problema samo u onom slučaju kad se funkcija $f(x)$ dade razviti u Fourierov red sinusa. Traženi koeficijenti a_n bit će tada određeni izrazom

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

Koji su to funkcije f odgovara Dirichletov teorem